曲线、曲面积分 1

一.曲线积分

1. 设为椭圆, 其周长记为。 求

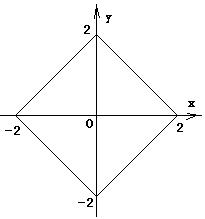
解法一： 椭圆的方程可写成 。于是



由对称性, , 故.

解法二：椭圆：写作参数式，，。于是所求第一型曲线积分为 。而

. 因此原积分为。

1. 设为闭曲线：，逆时针为正向。

计算。

**解：**利用，，

再将曲线分成4段直线段，

，，x减少为正向；

，，x减少为正向；

，，x增加为正向；

，，x增加为正向；

，

，

，

，

综上，原式．

二．曲面积分

1. 求, 其中为单位球面.

解: 



其中是球的表面积. 由对称性可知,,故。

1. 计算螺旋面：，，（）的面积。

解：

。

1. 求圆柱面被抛物柱面及平面所截部分的侧面积。

解法一：（利用第一类曲线积分的几何意义）

侧面积 , 其中为空间曲线在平面上的投影，即平面上的园：。其参数方程为，，，它的弧长微分。

于是。

解法二：（第一类曲面积分）由于所截部分关于平面对称，即点当且仅当。位于部分的曲面方程为，，其中。于是所求面积为



。解答完毕。

1. 计算第一型曲面积分,以及第二型曲面积分, 其中曲面为球面；定向曲面的正法向向外。

解：分别记，为的上半球面和下半球面，它们的方程为

：，

：，

考虑第一型曲面积分。根据被积函数和球面的对称性，我们有。因此

。

对于上半球面，面积元素

。

于是

= =。

考虑第二型曲面积分。

。注意到

，以及

，故

。

1. 记为锥面被柱面所截的有限部分。规定曲面的正向

向下，所得的定向曲面记为。求下面两个积分的值。

(i) 。 (ii) .

解：(i) 简单计算知锥面的面积元素为。因此



(ii) 不难计算曲面的单位正法向量为。于是根据第二

曲面积分的定义有



解答完毕。

1. 设一元函数于整个实轴上连续，代表单位球面 。证明Poisson公式 ，这里。（课本习题4.3第11题，page 187）。

为了证明Poisson公式，我们需要先建立一个Lemma。

**Lemma**：设是一个正则的参数曲面。记是在一个正交变换（正交矩阵）下的象，

即。记，，则对任何上连续函数，我们有。（这个Lemma大致的意思是说，曲面的面积元素关于正交变换是不变的。）

证明：由假设有正则的参数表示，，为平面有界闭域。

由此导出曲面的一个参数表示，。于是我们可以

确定两个曲面和关于上述参数表示的Gauss系数，，，和，，：

，，。

，

同理可证，。因此我们有。于是



。证毕。

Poisson公式的证明：

取一个三阶正交矩阵，使得的第一行为。作正交变换，其中记号，的意义同上。于是。此外，在这个正交变换下，单位球面仍为单位球面。根据上述Lemma可知

。

我们来考虑上式右边的积分。根据对称性知

。

考虑上式右边的积分。简单计算可知曲面的面积元素为

。于是



。

证毕。

1. 记为圆周，从Ox轴的正向看去，圆周的正向为逆时针方向。写出的参数方程，并利用这个参数方程来计算线积分

。

（注：我们将在第三部分的第3题，利用Stokes公式更简单地计算上述线积分。）

**解：**在球坐标下曲线的方程为 ，由此得到的参数方程

 ，参数增加为曲线正向，

代入曲线积分式，得







。

解答完毕。

1. 记为圆柱面位于的部分，外法向为正，计算曲面积分

。

解法1：记向量场。由假设的单位正法向量，当。曲面在柱面坐标下的方程为，，，，。记。则，。于是

。这表明与的单位正法向量一致。因此





。

解法2：记立体，，，正法向向下，，，正法向向上。根据Gauss公式得



．简单计算得到，。因此原积分。解答完毕。